TD n°2: Fonctions holomorphes et applications conformes

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-3-4-5-7-8. Les exercices marqués d'un [1] sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

Exercice 1. Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$.
On note ∂ et $\overline{\partial}$ les opérateurs

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

1. Vérifier qu'une fonction différentiable (au sens réel) $f : U \to \mathbb{C}$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$.

2. Vérifier que ∂ et $\overline{\partial}$ vérifient la règle de Leibniz : pour f, g différentiables, on a $\partial(fg) = f\partial g + \partial f g$, et similairement pour $\overline{\partial}$.

3. Ecrire le laplacien Δ en fonction de ∂ et $\overline{\partial}$, et montrer que si f est holomorphe alors $|f|^2$ est sous-harmonique, c'est-à-dire que $\Delta|f|^2 \geqslant 0$.

4. Démontrer que pour f holomorphe, on a $\Delta f = 0$, et donc les parties réelle et imaginaire de f sont harmoniques. La réciproque est fausse : donner un contre-exemple.

5. En déduire que si f ne s'annule pas, $\log|f|$ est harmonique. De même, si une détermination de $\arg(f)$ existe, démontrer qu'elle est harmonique.

Exercice 2. Cauchy-Riemann polaire.
Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$. On écrit $f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann se réécrivent

$$\begin{cases} \partial_\theta u = -r\partial_r v \\ r\partial_r u = \partial_\theta v \end{cases} .$$

Exercice 3. Somme et produit réels.
On fixe un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$.

1. Soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$ telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer que $f - g$ est une constante réelle.

2. Soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$, avec g inversible. Supposons que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer que f/g est une constante réelle.

Exercice 4. Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ par l'algèbre linéaire.
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$. On considère l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $J : W \to W$ donné par $f \mapsto (v \mapsto f(iv))$, et on voit W comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel par $z \cdot f = zf$.

1. Vérifier que J n'est pas la multiplication par i.

2. Vérifier que J est diagonlisable sur W et expliciter les projections sur les espaces propres de valeurs propres i et $-i$, que l'on note $W^{1,0}$ et $W^{0,1}$.

3. Intepréter $W^{1,0}$ et $W^{0,1}$ en terme de $\mathbb{C}$-linéarité, et vérifier que $W^{0,1} = \overline{W^{1,0}}$ (conjugué complexe).
Soient à présent U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable au sens réel. On fixe un point $p \in U$.

---

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

4. Appliquer la décomposition de l'exercice à l'application $\mathbb{R}$-linéaire $d_p f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et retrouver les expressions de $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en décomposant $d_p f$ dans la $\mathbb{C}$ base dx, dy de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Exercice 5. Fonctions holomorphes en plusieurs variables

On définit, sur $\mathbb{C}^n$, les opérateurs

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \overline{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

On écrit $dz_j = dx_j + idy_j$, et $d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$, et on fixe un ouvert U de $\mathbb{C}^n$.

1. Vérifier que pour $f : U \to \mathbb{C}$ différentiable, on a

$$df = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(f) dz_j + \overline{\partial}_j(f) d\overline{z}_j.$$

   On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe si df est $\mathbb{C}$-linéaire.

2. Vérifier que cette condition est équivalente à $\overline{\partial}_j(f) = 0$ pour tout j.
3. Ecrire le laplacien en dimension $2n$ en fonction des $\partial_j, \overline{\partial}_j$. En déduire que les parties réelle et imaginaire des fonctions holomorphes en plusieurs variables sont harmoniques, et que $|f|^2$ est sous-harmonique.
4. Prouver qu'en fait, la partie réelle d'une fonction holomorphe vérifie les équations $\partial_j \overline{\partial}_k u = 0$ pour tous j, k.
5. Trouver une fonction harmonique $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ qui n'est, même localement, pas la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Exercice 6. L'anneau des fonctions analytiques sur un compact

On considère, pour $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact connexe infini (non-réduit à un singleton), l'ensemble $\mathcal{O}(K)$ des fonctions $f : K \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe un voisinage V de K et une fonction analytique sur V dont la restriction à K est f.

1. Expliciter $\mathcal{O}\big(\overline{\mathbb{D}}(0, R)\big)$ pour $R > 0$.
2. On va munir $\mathcal{O}(K)$ d'une structure d'anneau commutatif et vérifier quelques propriétés basiques.
   (a) Démontrer que $\mathcal{O}(K)$ est un sous-anneau de l'anneau des fonctions (continues) de K dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire qu'il est stable par somme, produit, et qu'il contient 0 et 1).
   (b) Vérifier que $f \in \mathcal{O}(K)$ est inversible si et seulement si elle ne s'annule pas sur K.
   (c) Démontrer que $\mathcal{O}(K)$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que si $fg = 0$ dans $\mathcal{O}(K)$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.
   (d) Démontrer que f est mutliple de g dans $\mathcal{O}(K)$ si et seulement si f s'annule partout où g s'annule, et l'ordre d'annulation de f est supérieur à celui de g en ces points.
3. Soit $I \subseteq \mathcal{O}(K)$ un idéal non-nul. Démontrer que l'ensemble $V(I) := \{z \in K : \forall f \in I, f(z) = 0\}$ est fini. On note, pour $\alpha \in V(I)$, k_α le minimum des ordres d'annulation de fonctions de I en α.
4. Démontrer que I est contenu dans l'idéal engendré par le polynôme $\prod_{\alpha \in V(I)} (z - \alpha)^{k_\alpha}$.
5. (a) Soit $g \in \mathcal{O}(K)$, $\alpha \in K$ un point de non-annulation de g et $k \geqslant 1$ un entier naturel. Démontrer qu'il existe un polynôme $s(z) \in \mathbb{C}[z]$ tel qu'au voisinage de α, on aie $s(z)f(z) = 1 + (z - \alpha)^k + ...$
   Indication : On pourra considérer le développement en série entière de $\frac{1+(z-\alpha)^k}{g(z)}$ *au voisinage de* α.
   (b) Soient $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$ distincts, $k_1, ..., k_m$ des entiers $\geqslant 1$. Démontrer qu'il existe un polynôme $S(z)$ tel que pour tout i, on aie au voisinage de α_i :

$$S(z)g(z) = 1 + (z - \alpha_i)^{k_i} + ...$$

(c) Soient $f, g \in \mathcal{O}(K)$ deux fonctions sans point d'annulation en commun. Montrer qu'il existe des fonctions $R, S \in \mathcal{O}(K)$ telles que $R(z)f(z) + S(z)g(z) = 1$.

6. Démontrer par récurrence que pour $f_1, ..., f_m \in \mathcal{O}(K)$, il existe une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}(K)$ des f_i qui s'annule précisément sur $\bigcap_{i=1}^m V(f_i)$ et dont l'ordre d'annulation en $\alpha \in \bigcap_{i=1}^m V(f_i)$ est le minimum des ordres d'annulation des f_i en α.

7. Démontrer que $\mathcal{O}(K)$ est principal.
Remarque : le même théorème est faux pour $\mathcal{O}(U)$: étant donnée une suite $(a_n)_n$ sans point d'accumulation, on peut définir l'idéal de $\mathcal{O}(U)$ des fonctions nulles sur a_n apcr. Avec un théorème qui garantit l'existence de fonctions holomorphes de m premières dérivées prescrites sur un ensemble discret, on peut prouver par des méthodes similaires à celles de cet exercice que cet idéal n'est pas principal.

Applications conformes

Exercice 7. Applications linéaires conformes.

1. Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application conforme : démontrer qu'elle est de la forme λU, avec $\lambda > 0$ et U matrice orthogonale (on pourra considérer l'action de T sur une base orthonormée).

2. Vérifier que dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, une application linéaire est conforme si, et seulement si elle est $\mathbb{C}$-linéaire. Trouver des contre-exemples à ce résultat dans $\mathbb{C}^n$, $n > 1$.

Exercice 8. La sphère de Riemann comme espace projectif et l'action de PGL_2.
On note $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (ou juste $\mathbb{P}^1$) l'ensemble des droites complexes dans $\mathbb{C}^2$. Si $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ est non nul, on note $[u : v]$ la droite qu'il engendre, et on a $[\lambda u : \lambda v] = [u : v]$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

1. Vérifier que $\mathbb{C}$ s'injecte dans $\mathbb{P}^1$ en envoyant z sur $[z : 1]$.

2. Vérifier que $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}$ est réduit à un point, la droite $[1 : 0]$, que l'on note ∞.
Ainsi, $\mathbb{P}^1$ s'identifie naturellement au compactifié d'Alexandroff du plan : la sphère. On le munit de cette topologie. Si $U \subseteq \mathbb{P}^1$ est un ouvert contenant l'infini et $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction, on dit que f est holomorphe si elle est holomorphe au voisinage de tout point non-infini et si $z \mapsto f([1 : z])$ est holomorphe au voisinage de zéro (moralement, $z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe au voisinage de zéro). Si $f : U \to \mathbb{P}^1$ est une fonction, on dit qu'elle est holomorphe si elle est de la forme $[u(z) : v(z)]$ avec u, v fonctions holomorphes.

3. Dessiner le disque unité et le demi-plan de Poincaré sur $\mathbb{P}^1$.

4. Démontrer que pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, la fonction
$$[z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw]$$
est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{P}^1$. On appelle homographie de $\mathbb{P}^1$ toute application de cette forme.

5. Vérifier la cohérence avec la définition des homographies sur des ouverts de $\mathbb{C}$.

6. Expliciter une homographie qui envoie biholomorphiquement le disque unité $\mathbb{D}$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$.

7. On note $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ l'ensemble des applications holomorphes de $\mathbb{P}^1$ dans lui-même. Démontrer que l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ donnée par
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \big([z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw]\big)$$
est compatible à la composition. En déduire que les homographies sont inversibles, et donner la formule pour l'inverse. On note $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ l'image de cette application.

8. Vérifier que la restriction de l'application précédente à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est toujours $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

9. Calculer les noyaux des morphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 9. Images de droites par des homographies

1. Vérifier que les cercles dans $\mathbb{C}$ sont exactement donnés par les équations du type

$$|z|^2 - 2\Re(\overline{z}\alpha) + c = 0$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $c \in]-\infty, |\alpha|^2[$.

2. Vérifier que les droites réelles dans $\mathbb{C}$ sont exactement données par les équations du type

$$\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $c \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que ces deux équations sont un cas particulier d'équations de la forme suivante :

$$|\alpha z + \beta w|^2 - |\gamma z + \delta w|^2 = 0$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, pour $w = 1$.

4. Vérifier que l'équation précédente définit bien un sous-ensemble de $\mathbb{P}^1$, et que cet ensemble n'est pas vide, un unique point, ou $\mathbb{P}^1$ entier si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 1$, auquel cas il définit un cercle (une droite avec le point à l'infini est un cercle).
Indication : on pourra vérifier que si $|\alpha| \neq |\gamma|$, on n'a pas de point à l'infini, auquel cas on se ramène par changements de variables à des cercles. Dans le cas contraire, on vérifie qu'on obtient des droites. Alternativement, on pourra penser à utiliser un ensemble bien connu de générateurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

5. En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ envoie les cercles sur des cercles, et agit transitivement sur l'ensemble des cercles dans $\mathbb{P}^1$.